kümesi A nın bir denklik sınıfı olmak üzere $\sim$ bağıntısı $\mathbb{E}$ üzerinde bir denklik bağıntısı tanımlar. $\tilde{A}$ sınıfına A nın gücü (veya kardinal sayısı) denir ve $cardA$ ile gösterilecektir. Eğer, $A \sim B$ bağıntısı sağlanıyorsa $cardA = cardB$ yazacağız.

Eğer, A kümesi B kümesinin herhangi bir $B_1 \subset B$ alt kümesine denk ise bunu $cardA \leq cardB$ ile göstereceğiz.

İleride tanımlanacak (Bkz. §1.10) doğal, tam, rasyonel ve reel sayılar kümeleri sırasıyla $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ ile gösterilir.

Tanım 1.4.16 : $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ *olsun.* $\mathbb{N}_n$ *ile denk olan bir kümeye sonlu (n elemanlı) bir küme ve* $\mathbb{N}$ *ile denk olan bir kümeye de sayılabilir bir küme denir. Bir öz alt kümesi ile denk olan bir kümeye sonsuz bir küme denir.*

1.5 Çözümlü Problemler

(1) Düzlemde doğrular arasında tanımlanan $\perp$ "diklik bağıntısı" nın bir denklik bağıntısı olup olmadığını inceleyiniz.

Çözüm: Düzlemde iki a ve b doğruları arasında

$$a \perp b = \{(a, b) : \text{ a ile b diktir}\}$$

biçiminde tanımlı bağıntı yansiyan değildir. Çünkü herhangi bir a doğrusu için $a \perp a$ özelliği doğru değildir. O halde bu bağıntı bir denklik bağıntısı değildir. $\diamond$

(2) $x,\ y \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\sim$ bağıntısı $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$ olarak tanımlansın. Bu bağıntının bir denklik bağıntısı olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Denklik bağıntısı özelliklerinin sağlandığını gösterelim.

(a) Her $x \in \mathbb{R}$ için $x - x = 0 \in \mathbb{Z}$ olduğundan $x \sim x$ dir.

(b) $x,\ y \in \mathbb{R}$ için, $x \sim y$ yani $x - y \in \mathbb{Z}$ olsun. Her tam sayının toplamsal tersi de bir tam sayıı olduğundan, $y - x = -(x - y) \in \mathbb{Z}$ ve

dolayısiyla $y \sim x$ dir.
(c) $x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$ için, $x \sim y$ ve $y \sim z$ yani $x - y \in \mathbb{Z}$ ve $y - z \in \mathbb{Z}$ olsun. İki tam sayının toplamı da tamsayı olduğundan, $x - z = (x - y) + (y - z) \in \mathbb{Z}$ dir. Dolayısiyla $x \sim z$ olur. $\diamond$

(3) $X = \{(x, y) : \ x, y \in \mathbb{N}\ \}$ olsun. $(x, y),\ (x_1, y_1) \in X$ üzerinde $\sim$ bağıntısı , "$(x, y) \sim (x_1, y_1) \Leftrightarrow xy_1 = yx_1$" olarak tanımlansın. Bu bağıntının bir denklik bağıntısı olduğunu gösteriniz.

Çözüm: (a) Her $(x, y) \in X$ için $xy = yx$ olduğundan $(x, y) \sim (y, x)$ dir.
(b) $(x_1, y_1),\ (x_2, y_2) \in X$ için $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ yani $x_1y_2 = y_1x_2$ olsun. Bu durumda, herhangi $m, n \in \mathbb{N}$ sayıları için $m.n = n.m$ olduğundan $x_2y_1 = y_1x_2 = x_1y_2 = y_2x_1$ yani, $x_2y_1 = y_2x_1$ dir. Dolayısıyla, $(x_2, y_2) \sim (x_1, y_1)$ olur.
(c) $(x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ (x_3, y_3) \in X$ için $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ ve $(x_2, y_2) \sim (x_3, y_3)$ yani $x_1y_2 = y_1x_2$ ve $x_2y_3 = y_2x_3$ olsun. Bu durumda,

$$x_1y_3 = x_1x_2y_3/x_2 = x_1y_2x_3/x_2 = y_1x_2x_3/x_2 = y_1x_3$$

ve dolayısıyla $(x_1, y_1) \sim (x_3, y_3)$ olur. $\diamond$

(4) $f : X \to Y$ ve $g : Y \to X$ iki fonksiyon ve $f \circ g = I_Y$ olsun.

(a) f nin örten, (b) g nin birebir olduğunu gösteriniz.

Çözüm: (a) $\forall y \in Y$ için, $g(y) = x$ alırsak, $f(x) = f(g(y)) = (f \circ g)(y) = I_Y = y$ olur. Böylece, $\forall y \in Y$ için $f(x) = y$ olacak şekilde $x = g(y) \in X$ elemanı vardır. O halde f örtendir.
(b) $y_1,\ y_2 \in Y$ için

$$\begin{aligned} g(y_1) = g(y_2) &\Rightarrow f(g(y_1)) = f(g(y_2)) \\ &\Rightarrow (f \circ g)(y_1) = (f \circ g)(y_2) \\ &\Rightarrow y_1 = y_2 \end{aligned}$$

olduğundan, g birebirdir. $\diamond$

(5) $X \times Y$ ve $Y \times X$ kümelerinin denk olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $f : X \times Y \to Y \times X$ fonksiyonu, $f(x,y) = (y,x)$ biçiminde tanımlansın. f nin birebir ve örten olduğunu gösterelim.

$\forall (y,x) \in Y \times X$ çifti için, $(x,y) \in X \times Y$ ve $f(x,y) = (y,x)$ olduğundan, f örtendir.

$(x_1, y_1),\ (x_2, y_2) \in X \times Y$ için,

$$\begin{aligned} f(x_1,y_1) = f(x_2,y_2) &\Rightarrow (y_1,x_1) = (y_2,x_2) \\ &\Rightarrow y_1 = y_2 \text{ ve } x_1 = x_2 \\ &\Rightarrow (x_1,y_1) = (x_2,y_2) \end{aligned}$$

olduğundan f birebirdir. O halde Tanım 1.4.15 gereğince $X \times Y$ ve $Y \times X$ kümeleri denktir. $\diamond$

(6) $f : X \to Y$ birebir örten bir fonksiyon ise, $f^{-1} : Y \to X$ fonksiyonu da birebir örtendir. Gösteriniz.

Çözüm: Birebir ve örtenlik özelliklerinin sağlandığını gösterelim. Y kümesinin herhangi iki farklı y_1 ve y_2 elamanı verilsin. Ayrıca, $f^{-1}(y_1) = x_1,\ f^{-1}(y_2) = x_2$ olarak alalım. Eğer, $f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2)$ ise $x_1 = x_2$ olur ve f birebir olduğundan $f(x_1) = f(x_2)$ elde edilir. Halbuki, f^{-1} fonksiyonunun tanımına göre bu $y_1 = y_2$ olması demektir. Böylece, $y_1, y_2 \in Y$ için

$$y_1 \neq y_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1) \neq f^{-1}(y_2)$$

olur. Dolayısıyla, $f^{-1} : Y \to X$ fonksiyonu birebirdir.

Herhangi bir $x \in X$ elemanı verilsin. Bu durumda, $f(x) = y$ olacak şekilde $y \in Y$ elemanı vardır. f^{-1} fonksiyonunun tanımına göre $f^{-1}(y) = x$ ve $f^{-1}(Y) = X$ olur. Buna göre $f^{-1} : Y \to X$ fonksiyonu örtendir. $\diamond$

(7) Örten, birebir ve birebir örten olmayan fonksiyonlar için örnek veriniz.

Çözüm:

• $X = \{1,2,3,4\}$ ve $Y = \{2,4,6,8,10\}$ kümleleri ve $x \in X$ için $f : x \to 2x$ şeklinde tanımlanan $f : X \to Y$ fonksiyonu verilsin. Bu fonksiyon birebir olup örten bir fonksiyon değildir. Çünkü $f^{-1}(10) = \emptyset$ dir.

• $X = \{1,2,3,4\}$ ve $Y = \{2,4,6\}$ kümeleri ve $1 \to 2;\ 2 \to 4;\ 3 \to 6;\ 4 \to 4$ şeklinde tanımlı f fonsiyonu verilsin. Bu fonksiyon örten olup birebir değidir. Çünkü, $2 \neq 4$ ve $f(2) = f(4)$ dir.

• $X = \{1,2,3,4\}$ ve $Y = \{2,4,6,8\}$ kümleleri ve $1 \to 4;\ 2 \to 8;\ 3 \to 8;\ 4 \to 8$ şeklinde tanımlanan $f : X \to Y$ fonksiyonu hem birebir hem de örten bir fonksiyon değildir. $\diamond$

(8) $f : X \to Y$ ve $g : Y \to Z$ fonksiyonları birebir ve örten olduğunda $g \circ f : X \to Z$ fonksiyonunun da birebir ve örten bir fonksiyon olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $h(x) = (g \circ f)(x),\ x \in X$ olsun.
(a) f ve g birebir ve örten olduğundan $x_1, x_2 \in X$ için

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$$

dir. Buradan $(g \circ f)(x_1) \neq (g \circ f)(x_2)$ olur. Yani, $h(x_1) \neq h(x_2)$ dir. Dolayısıyla, $h : X \to Z$ fonksiyonu birebir fonksiyondur.
(b) $z \in Z$ olsun. $g : X \to Z$ fonksiyonu birebir ve örten fonksiyon olduğundan $g^{-1}(z) = y$ olacak şekilde tek bir $y \in Y$ elemanı ve $f : X \to Y$ fonksiyonu da birebir ve örten olduğundan $f^{-1}(y) = x$ olacak şekilde tek bir $x \in X$ elemanı vardır. $f(x) = y,\ g(y) = z$ olduğundan

$$z = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = h(x)$$

dir. Yani, $h^{-1}(z) = x$ olur. Buradan, $h : X \to Z$ örten fonksiyondur. Böylece, $h : X \to Z$ birebir ve örten bir fonsiyon olur. $\diamond$

(9) $f : X \to Y$ bir fonksiyon ve E ile F, X in iki alt kümesi olsun.

(a) $E \subset F \Rightarrow f(E) \subset f(F)$; (b) $f(E \cup F) = f(E) \cup f(F)$

(c) $f(E \cap F) \subset f(E) \cap f(F)$

dir. Gösteriniz. Ayrıca, (c) şıkkında eşitliğin doğru olmadığını sağlayan bir örnek veriniz.

Çözüm: (a) $E \subset F$ olsun. $\forall y \in f(E) = \{\ f(x) :\ x \in E\ \}$ için $f(x) = y$ olacak şekilde en az bir $x \in E$ bulunur. Fakat, $E \subset F$ olduğundan $x \in F$ ve $y = f(x) \in f(F)$ olur. O halde $f(E) \subset f(F)$ dir.
(b) $E \subset (E \cup F)$ ve $F \subset (E \cup F)$ olduğundan (a) şıkkına göre, $f(E) \subset f(E \cup F)$ ve $f(F) \subset f(E \cup F)$ dir. Dolayısıyla,

$$(f(E) \cup f(E)) \subset f(E \cup F)$$

elde edilir. Tersine,

$$\begin{aligned} f(x) \in f(E \cup F) &\Rightarrow x \in (E \cup F) \Rightarrow x \in E \text{ veya } x \in F \\ &\Rightarrow f(x) \in f(E) \text{ veya } f(x) \in f(F) \\ &\Rightarrow f(x) \in (f(E) \cup f(E)), \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla,

$$f(E \cup F) \subset (f(E) \cup f(E))$$

elde edilir. Bu iki kapsamadan eşitlik elde edilir.
(c) $E \cap F \subset E$ ve $E \cap F \subset F$ olduğundan (a) şıkkına göre $f(E \cap F) \subset f(E)$ ve $f(E \cap F) \subset f(F)$ olur. Buradan,

$$f(E \cap F) \subset (f(E) \cap f(E))$$

elde edilir.

Eşitliğin doğru olmadığını bir örnek ile gösterelim: $X = \{3, 7, 11\}$, $Y = \{0, 1, 2\}$ olmak üzere, $f : X \to Y$ fonksiyonu $3 \to 1;\ 7 \to 1;\ 11 \to 2$ şeklinde tanımlansın. X in $E = \{3, 11\}$ ve $F = \{7, 11\}$ alt cümleleri için $E \cap F = \{11\}$, $f(E \cap F) = \{2\}$ ve $f(E) = \{1, 2\} = f(F)$, $f(E) \cap f(F) = \{1, 2\}$ dir. $\diamond$

(10) $f : X \to Y$ bir fonksiyon ve E ile F, Y nin alt kümeleri olsun. Bu durumda, aşaıgıdaki önermelerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $E \subset F \Rightarrow f^{-1}(E) \subset f^{-1}(F)$; (b) $f^{-1}(E \cap F) = f^{-1}(E) \cap f^{-1}(F)$;
(c) $f^{-1}(E \cup F) = f^{-1}(E) \cup f^{-1}(F)$; (d) $f^{-1}(E \setminus F) = f^{-1}(E) \setminus f^{-1}(F)$.

Çözüm: (a) $E \subset F$ olsun. Her $x \in f^{-1}(E)$ için, $f(x) \in E(E \subset F)$ olduğundan, $x \in f^{-1}(F)$ dir. Yani $f^{-1}(E) \subset f^{-1}(F)$ olur.
(b) $(E \cap F) \subset E$ ve $(E \cap F) \subset F$ olduğundan (a) şıkkına göre, $f^{-1}(E \cap F) \subset f^{-1}(E)$ ve $f^{-1}(E \cap F) \subset f^{-1}(F)$ olur. Dolayısıyla, $f^{-1}(E \cap F) \subset f^{-1}(E) \cap f^{-1}(F)$ bulunur. Tersine, her $x \in (f^{-1}(E) \cap f^{-1}(F))$ için $x \in f^{-1}(E)$ ve $x \in f^{-1}(F)$ olduğundan, $f(x) \in E$ ve $f(x) \in F$ olur. Yani $f(x) \in E \cap F$ olacağından, $x \in f^{-1}(E \cap F)$ bulunur. O halde, $(f^{-1}(E) \cap f^{-1}(F)) \subset f^{-1}(E \cap F)$ elde edilir. Her iki kapsamadan eşitlik elde edilir.
(c) $E \subset (E \cup F)$ ve $F \subset (E \cup F)$ olduğundan, (a) şıkkına göre, $f^{-1}(E) \subset f^{-1}(E \cup F)$ ve $f^{-1}(F) \subset f^{-1}(E \cup F)$ olur. Buradan, $(f^{-1}(E) \cup f^{-1}(F)) \subset f^{-1}(E \cup F)$ elde edilir. Tersine, her $x \in f^{-1}(E \cup F)$ için $f(x) \in (E \cup F) \Rightarrow f(x) \in E$ veya $f(x) \in F \Rightarrow x \in f^{-1}(E)$ veya $x \in f^{-1}(F) \Rightarrow x \in (f^{-1}(E) \cup f^{-1}(F))$ olur. Buradan, $f^{-1}(E \cup F) \subset (f^{-1}(E) \cup f^{-1}(F))$ bulunur. Her iki kapsamadan eşitlik elde edilir.
(d) $x \in f^{-1}(E \setminus F)$ olsun. Bu durumda, $f(x) \in (E \setminus F) \Rightarrow f(x) \in E$ ve $f(x) \notin F \Rightarrow x \in (f^{-1}(E) \setminus f^{-1}(F)$ olur. Böylece, $f^{-1}(E \setminus F) \subset (f^{-1}(E) \setminus f^{-1}(F))$ elde edilir. Tersine, $x \in (f^{-1}(E) \setminus f^{-1}(F))$ olsun. Bu durumda, $x \in f^{-1}(E)$ ve $x \notin f^{-1}(F) \Rightarrow f(x) \in E$ ve $f(x) \notin F \Rightarrow f(x) \in (E \setminus F) \Rightarrow x \in f^{-1}(E \setminus F)$ olur. Böylece, $(f^{-1}(E) \setminus f^{-1}(F)) \subset f^{-1}(E \setminus F)$ bulunur. Her iki kapsamadan eşitlik elde edilir. $\diamond$

(11) $f : X \to Y$ örten bir fonksiyon, E, X in herhangi bir alt kümesi olsun. Bu durumda, $f^{-1}(f(E)) = E$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $f : X \to Y$ örten olduğundan her $y \in Y$ için $f(x) = y$ olacak şekilde en az bir $x \in E$ elemanı vardır. Buradan, $\forall y \in Y$

için $f^{-1}(y) \neq \emptyset$ dir. Böylece, her $E \subset X$ için $f^{-1}(f(E)) \neq \emptyset$ elde edilir. $y \in f^{-1}(f(E)) \Rightarrow f(y) \in f(E) \Rightarrow y \in E$ olur. Buradan, $f^{-1}(f(E)) \subset E$ elde edilir. Tersine, $x \in E$ olsun. Bu durumda, f örten olduğundan $f(x) = y$ olacak şekilde en az bir $y \in f(E)$ elemanı vardır. $f(x) \in f(E)$ olduğundan $x \in f^{-1}(f(E))$ olur. Dolayısıyla, $E \subset f^{-1}(f(E))$ elde edilir. Her iki kapsamadan eşitlik elde edilir. $\diamond$

(12) Çift doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}_Ç$ nin sayılabilir olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $n \to 2n$ $(n \in \mathbb{N})$ şeklinde tanımlı $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_Ç$ fonksiyonu birebir örten olduğundan, $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}_Ç$ olur. Böylece, $\mathbb{N}_Ç$ kümesi sayılabilirdir. $\diamond$

(13) Tam sayılar kümesinin sayılabilir olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$n \to \begin{cases} \dfrac{n}{2}, & \text{n çift ise,} \\ -\dfrac{n-1}{2}, & \text{n tek ise.} \end{cases}$$

şeklinde taımlı $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonu birebir örten olduğundan, $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$ olur. Buradan, $\mathbb{Z}$ sayılabilirdir. $\diamond$

(14) Çift tam sayılar kümesinin sayılabilir olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$n \to \begin{cases} n, & \text{n çift ise,} \\ -n+1, & \text{n tek ise.} \end{cases}$$

şeklinde taımlı $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}_Ç$ fonksiyonu birebir örten olduğundan, $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}_Ç$ olur. Buradan, $\mathbb{Z}_Ç$ sayılabilirdir. $\diamond$

(15) 0 ve 1 dahil bu iki sayı arasında kalan $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesinin sayılabilir olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Eşdeğer kesirleri birden fazla tekrarlamamak koşuluyla, önce paydası 2 sonra 3 v.s. şeklinde bütün kesirleri sırayla yazalım. Bu durumda,

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & 11, & 12, & 13,\ldots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow\cdots \\
0, & 1, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{3}, & \frac{2}{3}, & \frac{1}{4}, & \frac{3}{4}, & \frac{1}{5}, & \frac{2}{5}, & \frac{3}{5}, & \frac{4}{5}, & \frac{1}{6}, & \frac{5}{6},\cdots
\end{array}$$

şeklinde tanımlı $f:\mathbb{N}\to([0,1]\cap\mathbb{Q})$ fonksiyonu birebir örten olduğundan, $\mathbb{N}\sim([0,1]\cap\mathbb{Q})$ olur. Böylece, $[0,1]\cap\mathbb{Q}$ kümesi sayılabilirdir. $\diamond$

1.6 Ek Problemler

(16) $f:X\to Y$ bir fonksiyon ve E ile F, X in iki alt kümesi olsun. $f(E)\setminus f(F)\subset f(E\setminus F)$ olduğunu, fakat eşitliğin doğru olmadığını bir örnek ile gösteriniz.

(17) $f:X\to Y$ bir fonksiyon, $E\subset X$ ve $F\subset Y$ olsun. Bu durumda, aşağıdaki önermelerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $E\subset f^{-1}(f(E))$;

(b) $f(f^{-1}(F))=F$;

(c) $f(E)\cap F=f(E\cap f^{-1}(F))$;

(d) $f(E)\cap F=\emptyset\Leftrightarrow E\cap f^{-1}(F)=\emptyset$;

(e) $f(E)\subset F\Leftrightarrow E\subset f^{-1}(F)$.

(18) $f:X\to Y$ bir fonksiyon, $E_1,\ E_2\subset X$ ve $F_1,\ F_2\subset Y$ olsun. Bu durumda, aşağıdaki önermelerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $f(E_1)\setminus f(E_2)\subset f(E_1\setminus E_2)$;

(b) $f^{-1}(F_1\setminus F_2)\subset f^{-1}(F_1)\setminus f^{-1}(F_2)$;

(19) $f : X \to Y$ bir fonksiyon ve $F \subset Y$ olsun. $f^{-1}(F^c) = (f^{-1}(F))^c$ olduğunu gösteriniz.

(20) $f : X \to Y$ birebir olması için gerek ve yeter koşul her $F \subset Y$ çin $f(f^{-1}(F)) = F$ olmasıdır. Gösteriniz.

(21) $f(X \setminus E) \subset Y \setminus f(E)$ ve $f(X \setminus E) \supset Y \setminus f(E)$ önermelerini sağlayacak $f : X \to Y$ ve $E \subset X$ için örnekler veriniz.

(22) $f : X \to Y$ ve $g : Y \to Z$ fonksiyonları birebir ise, $g \circ f : X \to Z$ fonksiyonun da birebir olduğunu gösteriniz.

(23) $f : X \to Y$ ve $g : Y \to Z$ fonksiyonları örten ise, $g \circ f : X \to Z$ fonksiyonun da örten olduğunu gösteriniz.

(24) $f : X \to Y$ ve $g : Y \to Z$ fonksiyonları verilsin.

(a) $g \circ f = I_X$ ise f nin birebir olduğunu;

(b) $f \circ g = I_Y$ ise f nin örten olduğunu;

(c) $g \circ f = I_X$ ve $f \circ g = I_Y$ ise f nin birebir örten olduğunu gösteriniz.

(25) Tüm pozitif rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{Q}^+$ nin sayılabilir olduğunu gösteriniz.

(26) X ve Y kümeleri sayılabilir ise, $X \cup Y$'nin de sayılabilir bir küme olduğunu gösteriniz.

(27) X ve Y kümeleri sayılabilir ise $X \times Y$ kümesinin de sayılabilir olduğunu gösteriniz.

(28) Rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{Q}$ nin sayılabilir olduğunu gösteriniz.

(29) $[0, 1]$ aralığındaki reel sayılar kümesinin sayılamaz olduğunu gösteriniz.

(30) Reel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ nin ve irrasyonel sayılar kümesi $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nun sayılamaz olduğunu gösteriniz.